Anné universitaire 2018-2019
Session d'Automne 2018

Université IBN TOFAÏL

Ecole Nationale
Des
Sciences appliquées

Cycle préparatoire

Semestre 3

Cours de Calcul différentiel

Fiche 4:
Limte et continuité

Pr. Ch. Bensouda

Chapter 1 Limite et continuité:

1.1 Notion de limite:

Définition:

Soit f un champ de vecteurs défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ et soit $a \in \overline{U}$.

- On dit que le champ f tend vers une limite $l \in \mathbb{R}^q$ quand la variable x tend, par valeurs différentes, vers a et on note

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f = l$$

si pour tout $\varepsilon > 0$; il existe $\eta > 0$ tel que

$$0 < \|x - a\|_p < \eta \text{ alors } \|f(x) - l\|_q < \varepsilon.$$

Proposition 1 (fondamentale):

Soient

$$f \equiv (f_1, f_2, ..., f_q)$$

un champ de vecteurs défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ et soit $a \in \overline{U}$.

Alors; le champ de vecteur f admet une limite

$$l = (l_1, l_2, ..., l_q) \in \mathbb{R}^q$$

si, et seulement si, pour tout $k = 1, 2, ..., q$ le champ scalaire composant f_k admet $l_k \in \mathbb{R}$ pour limite en une limite $a \in \overline{U}$.

On écrit alors

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} (f_1, f_2, ..., f_q) = (l_1, l_2, ..., l_q)$$

si, et seulement si, pour tout $k = 1, 2, ..., q$ on a

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f_k(x) = l_k \ ; \ k = 1, 2, ..., q.$$

Proposition 2:

Soit f un champ de vecteurs défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ et soit $a \in \overline{U}$.

Alors; le champ f admet une limite $l \in \mathbb{R}^q$ en $a \in \overline{U}$, si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_n$ qui converge vers $a \in \overline{U}$, la suite image $(f(u_n))_n$ converge vers $l \in \mathbb{R}^q$.

1.1.1 Propriétés des limites:

Les mêmes propriétés que pour les fonctions réelles d'une variable réelle sont obtenues pour les fonctions vectorielles de variables vectorielles.

1.1.1.1 Unicité:

Proposition:

Soit f un champ de vecteurs défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ et soit $a \in \overline{U}$.

Alors; la limite du champ f en $a \in \overline{U}$, quand elle existe, est unique.

De plus cette limite est la même quand la variable x tend vers a suivant n'importe lequel des chemin dans U.

Conséquence:

Soit f un champ de vecteurs défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ et soit $a \in \overline{U}$.

- Si suivant deux chemins différents dans U le champ f admet deux limites différentes alors ce dernier n'a pas de limite en a.

1.1.1.2 Linéarité:

Proposition:

Soient f et g deux champs de vecteurs définis sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$, et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $a \in \overline{U}$. Si

$$\left(\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f\right) = l \in \mathbb{R}^q \text{ et } \left(\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} g\right) = l' \in \mathbb{R}^q$$

Alors nécessairement on a

$$\left(\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} (\alpha f + \beta g)\right) = (\alpha l + \beta l') \in \mathbb{R}^q.$$

1.1.1.3 Produit et quotient:

Proposition:

Soient f un champ vectoriel à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ et φ un champ scalaire, tous les deux définis sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.

- Si

$$\left(\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f\right) = l \in \mathbb{R}^q \text{ et } \left(\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \varphi\right) = \lambda \in \mathbb{R}$$

alors nécessairement on a

$$\left(\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} (\varphi.f)\right) = (\lambda.l) \in \mathbb{R}^q.$$

- De même si

$$\left(\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \varphi\right) = \lambda \in \mathbb{R}^*$$

alors le champ de vecteur

$$\left(\frac{f}{\varphi}\right) \text{ est défini autour de } a \in \overline{U}$$

et on a nécessairement

$$\left(\lim_{\substack{x\to a\\ \neq}}\left(\frac{f}{\varphi}\right)\right)=\left(\frac{l}{\lambda}\right)\in\mathbb{R}^q.$$

1.1.1.4 Composés:

Proposition:

Soient f un champ de vecteurs défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ et g un champ de vecteurs défini sur un ouvert V de $\mathbb{R}^q$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de sorte que

$$f(U)\subset V.$$

Alors le champ de vecteur composé $(g\circ f)$ est défini sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et on a

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))\in\mathbb{R}^d\ ;\ x\in U.$$

- Si

$$a\in\overline{U}\text{ et }b\in\overline{f(U)},$$

et on a

$$\left(\lim_{\substack{x\to a\\ \neq}}f\right)=b\text{ et }\left(\lim_{\substack{x\to b\\ \neq}}g\right)=l$$

alors nécessairement le champ composé $(g\circ f)$ admet une limite en $a\in\overline{U}$ et on a

$$\left(\lim_{\substack{x\to a\\ \neq}}(g\circ f)\right)=l.$$

Exemples:

1- Considérons le champ de vecteurs f donné par

$$f(x,y,z)=(u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z))$$

avec

$$\begin{cases} u(x,y,z)=\left(\frac{\ln\left(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\cos(xyz)\\ v(x,y,z)=\left(\frac{e^y-1}{y}\right)e^{xz}\\ w(x,y,z)=\left(\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}\right)\ln(1+y^2z^2)\end{cases}$$

dont le domaine de définition est

$$D_f=\mathbb{R}^3\backslash\left(\{(0,0,0)\}\cup\{(x,0,z)\ \ /x,z\in\mathbb{R}\}\cup\left\{\left(\sqrt{2},y,z\right)\ \ /y,z\in\mathbb{R}\right\}\right).$$

On remarque que

$$\overline{D_f}=\overline{\mathbb{R}^3\backslash A}=\mathbb{R}^3.$$

- On a

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ \neq}}f(x,y,z)=(1,1,0).$$

- On a

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to\left(\sqrt{2},1,-1\right)\\ \neq}} f\left(x,y,z\right) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\ln 3}{2}\right)\cos\left(\sqrt{2}\right) \\ \left(\frac{e-1}{e^{\sqrt{2}}}\right) \\ \left(2\sqrt{2}\right)\ln(2) \end{pmatrix}.$$

- On a

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(-1,0,1)\\ \neq}} f\left(x,y,z\right) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}\right) \\ e^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2- Soit le champ scalaire

$$\begin{array}{rcl} g & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f\left(x,y\right) \end{array}$$

donné par

$$g\left(x,y\right) = \left(\frac{x\ y^{\frac{1}{3}}}{x^2+y^{\frac{2}{3}}}\right) \in \mathbb{R}\ ;\ (x,y) \neq (0,0)\,.$$

On a

$$(0,0) \in \overline{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}} = \mathbb{R}^2.$$

- Suivant le chemin

$$y = x^3$$

le champ scalaire devient

$$g\left(x,y\right) = f(x,x^3) = \left(\frac{1}{2}\right)$$

et on a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} g(x,x^3) = \left(\frac{1}{2}\right).$$

- Suivant le chemin

$$y = -x^3$$

le champ scalaire devient

$$g\left(x,y\right) = f(x,-x^3) = \left(\frac{-1}{2}\right)$$

et on a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} g(x,x^3) = \left(\frac{-1}{2}\right).$$

Ainsi, le champ scalaire g n'admet pas de limite en $(0,0)$.

3- Soit le champ scalaire

$$\begin{array}{rcl} h & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & h\left(x,y\right) = \left(\frac{xy^2}{x^2-y}\right) \end{array}$$

dont le domaine de définition est

$$D_h = \mathbb{R}^2 \backslash \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x^2 \right\}.$$

- Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ on a

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (a,a^2) \\ \neq}} h(x,y) = \pm\infty.$$

Ainsi; le champ scalaire h n'a pas de limite en tout point de la forme

$$\left(a, a^2\right) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ a \neq 0.$$

- Pour $a = 0$ et suivant le chemin donné par

$$y = x^2 - \lambda x^5 \ \text{ où } \ \lambda \neq 0;$$

on a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} h\left(x, x^2 - \lambda x^5\right) = \frac{1}{\lambda} \lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \left(1 - \lambda x^3\right) = \frac{1}{\lambda}.$$

Il s'en suit que la fonction h n'a pas de limite en $(0,0)$.

4- Soit le champ scalaire

$$\begin{array}{rccl} k & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & k(x,y) = (x+y)\sin\left(\dfrac{1}{xy}\right) \end{array}$$

dont le domaine de définition est

$$D_k = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy \neq 0 \right\}.$$

- Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ on a

$$k(a,y) = (a+y)\sin\left(\frac{1}{ay}\right).$$

Considérons la suite $(y_n)_n$donnée par

$$y_n = \left(\frac{2}{(2n+1)a\pi}\right) \ ; \ n \in \mathbb{N}.$$

On a

$$\lim_n \left(\frac{2}{(2n+1)a\pi}\right) = 0$$

et on a

$$\begin{aligned} k(a, y_n) &= (a + y_n)\sin\left(\frac{1}{ay_n}\right) \\ &= (-1)^n \left(a + \frac{2}{(2n+1)a\pi}\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\left(\lim_n k(a, y_n)\right) \text{ n'existe pas}$$

et il s'en suit que

$$\left(\lim_{\substack{(x,y) \to (a,0) \\ \neq}} k(x,y)\right) \text{ n'existe pas.}$$

Pr. Ch. Bensouda

1.2 Notion de continuité:

1.2.1 Définitions et exemples:

Définitions*:*

Soient f un champ de vecteurs défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ et $a \in U$.

- On dit que le champ f est continu en a si $f(a)$ existe ($a \in D_f$ et $f(a) \in \mathbb{R}^q$) et si pour tout $\varepsilon > 0$; il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|x-a\|_p < \eta \text{ alors } \|f(x) - f(a)\|_q < \varepsilon.$$

On a alors

$$\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = f(a).$$

- Un champ f est dit continu sur une partie

$$A \subset U \subset \mathbb{R}^p$$

s'il est continu en tout point de A.

Définitions:

- Un champ de vecteurs f défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ est dit unifomement continu si pour tout $\varepsilon > 0$; il existe $\eta > 0$ tel que si

$$\|x-y\|_p < \eta \text{ alors } \|f(x) - f(y)\|_q < \varepsilon.$$

- Un champ de vecteurs f défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ est dit lipshitzien de rapport $k > 0$ si

$$\|f(x) - f(y)\|_q < k\,\|x-y\|_p \ ; \ x, y \in U.$$

Remarques:

- Tout champ uniformement continu est nécessairement continu.
- Tout champ Lipshitzien est uniformement continu.

Proposition 1 (fondamentale):

Soient

$$f \equiv (f_1, f_2, ..., f_q)$$

un champ de vecteurs défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ et soit $a \in U$.

Alors; le champ de vecteur f est continu en $a \in U$ si, et seulement si, pour tout $k = 1, 2, ..., q$ le champ scalaire composant f_k est continu en $a \in U$ et on a

$$\lim_{x\to a} (f_1, f_2, ..., f_q) = (f_1(a), f_2(a), ..., f_q(a)).$$

Proposition 2:

Soit f un champ de vecteurs défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ et soit $a \in U$.

Alors; le champ f est continu en $a \in U$ si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_n$ qui converge vers $a \in U$, la suite image $(f(u_n))_n$ converge vers $f(a) \in \mathbb{R}^q$.

Proposition 3:

Soit f un champ de vecteurs défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

1- Le champ f est continu.

2- L'image réciproque de tout ouvert de $\mathbb{R}^q$ est ouverte.

3- L'image réciproque de tout fermé de $\mathbb{R}^q$ est fermée.

Preuve:

<u>1 entraîne 2:</u>

- Supposons que la fonction f soit continue.

Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^q$. Si $(f^{-1}(V))$est vide alors $(f^{-1}(V))$ est ouvert. Sinon; soient $x_0 \in f^{-1}(V)$ et alors $y_0 = f(x_0) \in V$. Il existe $r > 0$ tel que

$$B_q(y_0, r) \subset V.$$

La fonction f étant continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que si

$$\|x - x_0\|_p < \eta \text{ alors } \|f(x) - y_0\|_q < r.$$

Donc

$$f(B_p(x_0, \eta)) \subset B_q(y_0, \varepsilon) \subset V$$

ou encore

$$B_p(x_0, \eta) \subset f^{-1}(V).$$

Il s'en suit que $f^{-1}(V)$ est voisinage de chacun de ces points. Donc $f^{-1}(V)$ est ouvert.

<u>2 entraîne 3:</u>

- Supposons que l'image réciproque de tout ouvert de $\mathbb{R}^q$ est ouverte.

Soit F un fermé dans $\mathbb{R}^q$. On a

$$f^{-1}(\mathbb{R}^q \backslash F) = \mathbb{R}^p \backslash f^{-1}(F).$$

Il s'en suit que $f^{-1}(F)$ est fermé.

<u>3 entraîne 1:</u>

- Supposons que l'image réciproque de tout fermé de $\mathbb{R}^q$ est fermée.

Soit $x_0 \in D_f$ et soit $\varepsilon > 0$. On pose

$$F = f^{-1}(\mathbb{R}^q \backslash B_q(f(x_0), \varepsilon)).$$

F est fermé. Il existe alors $\eta > 0$ tel que

$$B_p(x_0, \eta) \subset \mathbb{R}^p \backslash F.$$

Il s'ensuit alors que si

$$\|x - x_0\|_p < \eta \text{ alors } \|f(x) - f(x_0)\|_q < \varepsilon.$$

Ou encore que la fonction f est continue en x_0.

Exemples:

- Le champ de vecteur

$$\begin{array}{ccc} (+) & : & (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}^d \\ (u, v) & \longmapsto & (u + v) \end{array}$$

est Lipshitzien donc uniformement continu et on a

$$\|(u+v)-(u'+v')\|_d \leq (\|(u-u')\|_d + \|(v-v')\|_d) \; ; \; u,v,u',v' \in \mathbb{R}^d$$

- Le champ de vecteur

$$\begin{array}{rcl} (.) & : & \left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\right) \longrightarrow \mathbb{R}^d \\ (\lambda,u) & \longmapsto & (\lambda.u) \end{array}$$

est un champ continu.

- Le champ scalaire

$$\begin{array}{rcl} \|-\| & : & \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d \\ u & \longmapsto & \|u\| \end{array}$$

est Lipshtzien donc uniformement continu et on a

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u-v\| \; ; \; u,v \in \mathbb{R}^d.$$

1.2.2 Propriétés de la continuité:

Les mêmes propriétés que pour les fonctions réelles d'une variable réelle sont obtenues pour les fonctions vectorielles de variables vectorielles.

1.2.2.1 Linéarité:

Proposition:

Soient f et g deux champs de vecteurs définis sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$, et soit $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ et $a \in U$.

- Si les deux champs de vecteurs f et g sont continus en $a \in U$ alors le champ de vecteurs

$$(\alpha f + \beta g) \text{ est continu en } a \in U$$

et on a

$$\left(\lim_{x\to a}(\alpha f + \beta g)\right) = (\alpha f(a) + \beta g(a)) \in \mathbb{R}^q.$$

1.2.2.2 Produit et quotient:

Proposition:

Soient f un champ vectoriel à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ et φ un champ scalaire, tous deux définis sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.

- Si les deux champs de vecteurs φ et f sont continus en $a \in U$ alors le champ de vecteurs

$$(\varphi.f) \text{ est continu en } a \in U$$

et on a

$$\left(\lim_{x\to a}(\varphi.f)\right) = (\varphi(a).f(a)) \in \mathbb{R}^q.$$

- De même si

$$\left(\lim_{x\to a}\varphi\right) = \varphi(a) \in \mathbb{R}^*$$

alors le champ de vecteur

$$\left(\frac{f}{\varphi}\right) \text{ est défini autour de } a \in U$$

et on a nécessairement

$$\left(\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{\varphi}\right)\right) = \left(\frac{f(a)}{\varphi(a)}\right) \in \mathbb{R}^q.$$

1.2.2.3 Composés:

Proposition:

Soient f un champ de vecteurs défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ et g un champ de vecteurs défini sur un ouvert V de $\mathbb{R}^q$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de sorte que

$$f(U) \subset V.$$

Alors le champ de vecteur composé $(g \circ f)$ est défini sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et on a

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) \in \mathbb{R}^d \ ; \ x \in U.$$

- Si le champ

$$f \text{ est contini en } a \in U$$

et si le champ

$$g \text{ est contini en } b = f(a) \in f(U)$$

alors le champ composé

$$(g\circ f) \text{ est contini en } a \in U$$

et on a

$$\left(\lim_{x\to a}(g\circ f)\right) = (g\circ f)(a) \in \mathbb{R}^d.$$

Exemple:

Considérons le champ de vecteur

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) \end{array}$$

donné par

$$\begin{array}{rcl} f(x,y,z) & = & (e^{xyz}, \log(xyz)) \in \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \in & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

- Le champ f est continu sur son domaine de définition

$$D_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ xyz > 0\right\}.$$

Définition:

Soit $(E, \|-\|)$ un espace vectoriel normé.

- Tout champ de vecteurs

$$\begin{array}{rcl} f & : & E \longrightarrow E \\ u & \longmapsto & f(u) \end{array}$$

Lipshiteien de rapport

$$k \in]0,1[$$

est dit une contraction.

Théorème:

Soit $(E, \|-\|)$ *un espace de Banach.*

- Toute contraction admet un unique vecteur fixe

$$v \in E \text{ tel que } f(v) = v.$$

Proposition:

Soit f *un champ scalaire défini et continu sur un ouvert* $U \subset \mathbb{R}^p$.

- Pour tout compact $K \subset U$*; le champ scalaire* f *est bornée sur* K *et atteint ses bornes.*

Proposition:

Soit f *un champ de vecteurs défini et continu sur un ouvert* $U \subset \mathbb{R}^p$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^q$.

Alors; pour toute partie connexe

$$W \subset U \subset \mathbb{R}^p$$

son image continue

$$f(W) \subset \mathbb{R}^q \text{ est necéssairement connexe.}$$

Définitions:

- Pour deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^d$*; on appelle chemin continu allant de* $u \in \mathbb{R}^d$ *vers* $v \in \mathbb{R}^d$ *le graphe* Γ *de tout champ de vecteurs continu*

$$\begin{array}{rcl} \gamma & : & [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^d \\ t & \longmapsto & \gamma(t) \end{array}$$

tel que

$$\gamma(a) = u \text{ et } \gamma(b) = v.$$

- Une partie $U \subset \mathbb{R}^d$ *est dite connexe par arcs si pour deux vecteurs* $u, v \in U$, *il existe un chemin continu*

$$\Gamma \subset U \subset \mathbb{R}^d \text{ allantt de } u \in \mathbb{R}^d \text{ vers } v \in \mathbb{R}^d.$$

Proposition:

Soit $U \subset \mathbb{R}^d$ *un ouvert de* $\mathbb{R}^d$.

Alors U *est connexe si, et seulement si,* U *est connexe par arcs.*

1.2.3 Prolongement par continuité:

Définition:

Soit f un champ de vecteurs défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ et soit $a \in \overline{U}$ de sorte que f admette une limite en a.

- On appelle prolongement par continuité du champ f en $a \in \overline{U}$ le champ $\widetilde{f}$ continu en a donné par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \in \mathbb{R}^q & \text{si } x \in U \setminus \{a\} \\ \left(\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f\right) \in \mathbb{R}^q & \text{si } x = a \end{cases}.$$

Exemple:

Considérons le champ scalaire

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \left(\dfrac{x^3 - y^3}{x - y}\right) \end{array}$$

continu sur son domaine de définition est

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \neq y\right\}.$$

- Par ailleurs; pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$x^3 - y^3 = (x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right).$$

Ainsi on a

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 \ ; \ (x,y) \in D_f.$$

Le champ scalaire

$$\begin{array}{rcl} g & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & g(x,y) \end{array}$$

donné par

$$g(x,y) = \left(x^2 + xy + y^2\right) \ ; \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

est le prolongement continu de f à l'espace $\mathbb{R}^2$ tout entier.

1.2.4 Applications linéaires continues:

Soient $(E, \|-\|_E)$, $(F, \|-\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$. Rappelons qu'une application

$$\begin{array}{rcl} L & : & (E, \|-\|_E) \longrightarrow (F, \|-\|_F) \\ x & \longmapsto & L(x) \end{array}$$

est linéaire si

$$\begin{array}{rcl} L(\alpha x + \beta y) & = & \alpha L(x) + \beta L(y) \\ \alpha, \beta & \in & \mathbb{K}\ ,\ x, y \in E. \end{array}$$

- En particulier; on a

$$\begin{aligned} \|L(x) - L(y)\|_F &= \|L(x-y)\|_F \\ x, y &\in E. \end{aligned}$$

Théorème:

Soient $(E, \|-\|_E)$, $(F, \|-\|_F)$ *deux espaces vectoriels normés sur* $\mathbb{K}$ *et une application linéaire*

$$\begin{array}{rcl} L & : & (E, \|-\|_E) \longrightarrow (F, \|-\|_F) \\ x & \longmapsto & L(x) \end{array}$$

- Les assertions suivantes sont équivalentes:

1- L'application L *est continue sur* E*;*

2- L'application L *est continue à l'origine* 0*;*

3- Il existe $C > 0$ *tel que*

$$\|L(x)\|_F \leq C \|x\|_E \ , \ x \in E;$$

4- L'application L *est uniformément continue sur* E*.*

Notations:

Soient $(E, \|-\|_E)$ et $(F, \|-\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

- L'espace des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

- Le sous espace des applications linéaires continues de E dans F est noté $\mathcal{L}_c(E, F)$.

- Si $E = F$; l'espace des applications linéaires de E sur lui même, dit espace des endomorphismes de E, est noté

$$\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E).$$

Et le sous espace des endomorphismes continus sur E est noté $\mathcal{L}_c(E)$

Remarque:

- Toute application linéaire entre espaces de dimension finis est continue.

On écrit:

Pour tout $p, q \geq 1$*; on a*

$$\mathcal{L}_c(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^q) \equiv \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^q)$$

Conséquence:

Soient $(E, \|-\|_E)$, $(F, \|-\|_F)$ *deux espaces vectoriels normés et* $L \in \mathcal{L}_c(E, F)$ *une application linéaire continue.*

- La constante $C_L \in \mathbb{R}_+$ *donnée par*

$$\begin{aligned} C_L &= \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|L(x)\|_F \\ &= \sup_{\|x\|_E = 1} \|L(x)\|_F \\ &= \min\{C > 0 \ / \ \|L(x)\|_F \leq C \|x\|_E\} \end{aligned}$$

vérifie l'inégalité

$$\|L(x)\|_F \leq C_L \|x\|_E \ , \ x \in E.$$

Proposition:

Soient $(E, \|-\|_E)$ *et* $(F, \|-\|_F)$ *deux espaces vectoriels normés.*

- L'application

$$\begin{array}{rcl} \|-\| & : & \mathcal{L}_c(E,F) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ L & \longmapsto & \|L\| \end{array}$$

donnée par

$$\begin{aligned} \|L\| &= \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|L(x)\|_F \\ &= \sup_{\|x\|_E = 1} \|L(x)\|_F \\ &= \min \left\{ C > 0 \ / \ \|L(x)\|_F \leq C \|x\|_E \right\}. \end{aligned}$$

est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ *et on a l'inégalité*

$$\|L(x)\|_F \leq \|L\| . \|x\|_E \ , \ x \in E.$$

Proposition:

Soient $(E, \|-\|_E)$ *et* $(F, \|-\|_F)$ *deux espaces vectoriels normés.*

- Si l'espace $(F, \|-\|_F)$ *est un Banach alors l'espace*

$$(\mathcal{L}_c(E,F), \|-\|) \text{ est aussi un Banach.}$$

Proposition:

Soient $(E, \|-\|_E)$, $(F, \|-\|_F)$ *et* $(G, \|-\|_G)$ *trois espaces vectoriels normés.*

- Pour toutes applications linéaires $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ *et* $v \in \mathcal{L}_c(F,G)$*; l'application composée*

$$(vou) \in \mathcal{L}_c(E,G)$$

et on a

$$\|(vou)\| \leq \|(v)\| . \|(u)\|$$

Définitions:

Soient $(E, \|-\|_E)$ *et* $(F, \|-\|_F)$ *deux espaces vectoriels normés.*

- Une application linéaire continue $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ *est dite inversible ou encore un isomorphisme s'il existe* $v \in \mathcal{L}_c(F,E)$ *telle que*

$$vou = id_E \text{ et } uov = id_F$$

- L'espace des applications linéaires continues et inversibles de E dans F est noté $Isom(E,F)$.

- Si $E = F$ *alors l'espace des endomorphismes continus et inversibles de E est noté* $Isom(E)$.

Pr. Ch. Bensouda